

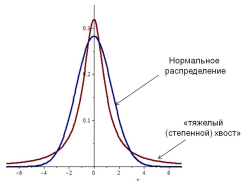
Прототип гидродинамического симулятора на основе дробно-дифференциальной модификации модели Black Oil

Н. С. Белевцов^{1,*}, С.Ю. Лукашук^{2,*}
nikitabelewtsov@mail.ru¹, lsu@ugatu.su²

Научно-исследовательская лаборатория «Групповой анализ математических моделей естествознания, техники и технологий»,
Уфимский государственный авиационный технический университет*

Научно-техническая конференция "Цифровые технологии в добыче и переработке углеводородов: от моделей к практике"
6–9 октября 2020 г.

Аномальный диффузионный перенос – перенос вещества, не подчиняющийся гауссовой статистике. Соответствующие функции распределения имеют в этом случае степенную асимптотику (так называемый, тяжелый хвост).

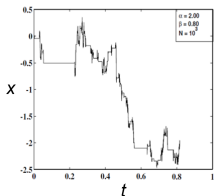


Основная причина аномальности процесса фильтрации в нефтяных пластах — **наличие трещин**, которое может быть обусловлено

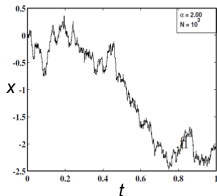
- естественной трещиноватостью,
- технологическими мероприятиями на скважинах (гидроразрыв пласта, кислотная обработка и т.д.).

Моделирование процессов фильтрации флюидов в таких пластах — одна из актуальных задач проектирования разработки нефтяных месторождений.

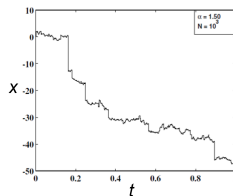
Субдиффузия



Классическая диффузия



Супердиффузия



- Основная идея – замена гетерогенной трещиновато-пористой среды на гомогенную с дробно-дифференциальными эффектами степенной памяти.

Математическое и компьютерное моделирование процессов фильтрации в неоднородных коллекторах нефтегазовых месторождений на основе дробно-дифференциального подхода*

Задачи проекта

- 1 Разработка новых и адаптация существующих дробно-дифференциальных моделей фильтрации.
- 2 Исследование качественных свойств этих моделей.
- 3 Разработка численно-аналитических и численных алгоритмов параметрической идентификации моделей.
- 4 Разработка параллельных алгоритмов компьютерного моделирования на основе разработанных моделей.
- 6 Создание, отладка и верификация действующих прототипов программных комплексов компьютерного моделирования и параметрической идентификации дробно-дифференциальных фильтрационных моделей.

* Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки 1.3103.2017/ПЧ на 2017–2019 гг.

Закон Дарси с оператором дробного дифференцирования по времени^{1,2}:

$$\mathbf{u} = -\frac{k^\alpha}{\mu} {}_0^C D_t^\alpha (\nabla p), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (1)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор скорости фильтрующегося флюида, μ — вязкость флюида, k^α — дробный аналог проницаемости пористой среды, p — давление, t — время,

$${}_0^C D_t^\alpha f = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \quad (2)$$

— дробная производная Капуто по времени.

Недостатки модели (1) :

- ④ отсутствие течения в стационарном режиме;
- ② возможность описания только субдиффузионного режима;
- ③ отсутствие предельного перехода в классический закон Дарси при $\alpha = 0$.

¹ Raghavan R. Fractional Derivatives: Application to Transient Flow // J. Petrol. Sci. Eng. — 2011. — V. 80. — P. 7–13.

² Islam, M. R., Hossain, M. E., Mousavizadegan, S. H., Mustafiz, S., Abou-Kassem, J. H. Advanced petroleum reservoir simulation: towards developing reservoir emulators. — Wiley: New Jersey, 2016. — 592 p.

Модель фильтрации, представляющая собой линейную комбинацию классического и дробно-дифференциального уравнений Дарси:

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \left[\nabla p + k^\alpha {}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha (\nabla p) \right], \quad \alpha \in (-1, 1). \quad (3)$$

- 1 Дробно-дифференциальный оператор ${}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ представляет собой дробную производную Капуто (с дополнительным условием $k^\alpha \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$).
- 2 При $\alpha \in (-1, 0)$ оператор ${}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha$ представляет собой интеграл дробного порядка:

$${}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha f \equiv {}_{t_0} I_t^{-\alpha} f = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_{t_0}^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha}} d\tau, \quad \alpha \in (-1, 0).$$

- 3 При $\alpha \in (0, 1)$ модель (3) позволяет описывать субдиффузионный режим фильтрации, а при $\alpha \in (-1, 0)$ — супердиффузионный.
- 4 В стационарном режиме процесс фильтрации описывается классическим законом Дарси.
- 5 Выполняется предельный переход в классический закон Дарси при $\alpha = 0$.

Уравнения массового баланса модели нелетучей нефти³ (black oil model):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_o}{B_o} \right) + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}_o}{B_o} \right) &= q_o; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_w}{B_w} \right) + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}_w}{B_w} \right) &= q_w; \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] + \nabla \left(\frac{\mathbf{u}_g}{B_g} + \frac{R_{so} \mathbf{u}_o}{B_o} \right) &= q_g. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

ϕ — пористость среды;

S_l — насыщенность для фазы l ;

B_l — объемный коэффициент фазы l ;

\mathbf{u}_l — скорость течения фазы l , м/с;

R_{so} — коэффициент растворимости газа в нефти;

q_l — плотность объемных источников (стоков) фазы l при стандартных условиях, c^{-1} ;

$l = \{o, w, g\}$ — обозначение фазы.

³ Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. — М.: Недра, 1982. — 407 с.

Обобщение закона Дарси (3) с учетом гравитационных сил и многофазности системы:

$$\mathbf{u}_l = -\frac{k}{\mu_l} \left[k_{rl} (\nabla p_l - \rho_l \mathbf{g}) + k_{rl}^\alpha \tau_0 \mathcal{D}_t^\alpha (\nabla p_l - \rho_l \mathbf{g}) \right], \quad l = o, w, g. \quad (5)$$

Здесь

k — тензор проницаемости породы, D ;

μ_l — вязкость фазы l , Па·с;

k_{rl} — относительная фазовая проницаемость для фазы l ;

k_{rl}^α — дробный аналог k_{rl} , c^α ;

p_l — давление фазы l , Па;

ρ_l — плотность фазы l , кг/м³;

\mathbf{g} — вектор ускорения свободного падения, м/с².

Замыкающие соотношения:

$$p_{cow} = p_o - p_w, \quad p_{cgo} = p_g - p_o, \quad (6)$$

$$S_o + S_w + S_g = 1. \quad (7)$$

Система уравнений модели:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{1 - S_w - S_g}{B_o} \right) = \nabla \left\{ \lambda_{ro} \left[\beta_o (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) + (1 - \beta_o) {}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) \right] \right\} + q_o \equiv F_o; \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi \frac{S_w}{B_w} \right) = \nabla \left\{ \lambda_{rw} \left[\beta_w (\nabla p_o - \nabla p_{cow} - \rho_w \mathbf{g}) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \beta_w) {}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha (\nabla p_o - \nabla p_{cow} - \rho_w \mathbf{g}) \right] \right\} + q_w \equiv F_w; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so}(1 - S_w - S_g)}{B_o} \right) \right] = \nabla \left\{ \lambda_{rg} \left[\beta_g (\nabla p_o + \nabla p_{cgo} - \rho_g \mathbf{g}) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - \beta_g) {}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha (\nabla p_o + \nabla p_{cgo} - \rho_g \mathbf{g}) \right] \right\} + \\ + \nabla \left\{ R_{so} \lambda_{ro} \left[\beta_o (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) + (1 - \beta_o) {}_{t_0} \mathcal{D}_t^\alpha (\nabla p_o - \rho_o \mathbf{g}) \right] \right\} + q_g \equiv F_g, \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{rl} = \frac{k(k_{rl} + k_{rl}^\alpha)}{\mu_l B_l}, \quad \beta_l = \frac{k_{rl}}{k_{rl} + k_{rl}^\alpha}, \quad l = o, w, g.$$

Начальные условия:

$$p_o(0, x, y, z) = p_o^0(x, y, z); \quad S_w(0, x, y, z) = S_w^0(x, y, z); \quad S_g(0, x, y, z) = S_g^0(x, y, z).$$

Граничные условия Дирихле на границе (или участке границы) Γ_1 :

$$p_l(t, x, y, z)|_{(x,y,z) \in \Gamma_1} = p_l^1, \quad l = o, w, g.$$

Граничные условия Неймана на границе (или участке границы) Γ_1 :

$$(\mathbf{p}_l, \mathbf{n})|_{(x,y,z) \in \Gamma_1} = f_l^1,$$

где \mathbf{n} — вектор внешней нормали к границе Γ_1 .

Случай непроницаемой границы Γ_2 (нулевой поток каждой фазы через границу):

$$(\mathbf{u}_l, \mathbf{n})|_{(x,y,z) \in \Gamma_2} = 0.$$

Для насыщенностей их градиент на границе предполагается равным нулю:

$$\left. \frac{\partial S_w}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial S_g}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0.$$

Полагаем, что по временной переменной $t \in [t_0, T]$ введена разностная сетка

$$\omega_t = \{t_n : t_n = t_{n-1} + \Delta t_n, n = 1, \dots, N, \sum_{n=1}^N \Delta t_n = T\}. \quad (11)$$

Предполагаются выполненными условия

$$p_{cow}(t) = p_{cow}(t_n), \quad p_{cgo}(t) = p_{cgo}(t_n), \quad t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Тогда при $t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$\frac{\partial p_o}{\partial t} = \frac{\partial p_w}{\partial t} = \frac{\partial p_g}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t}.$$

Уравнение на давление для $t \in [t_n, t_{n+1}]$:

$$b \frac{\partial p}{\partial t} = F_0 + \frac{B_w}{B_o} F_w + \frac{B_g}{B_o} (F_g - R_{so} F_o), \quad (12)$$

где

$$b = \frac{B_o(\phi' - \Sigma_w B'_w - \Sigma_g B'_g) + (\phi - \Sigma_w B_w - \Sigma_g B_g)(R'_{so} B_g - B'_o)}{B_o^2},$$

$$\Sigma_w = \phi \frac{S_w}{B_w}, \quad \Sigma_g = \phi \frac{S_g}{B_g}.$$

Примеры аппроксимации операторов интегро-дифференцирования дробного порядка

Общий вид разностной аппроксимации дробной производной ${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f$:

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f(t_{n+1}) \approx \frac{A_0}{(\Delta t_{n+1})^\alpha} f^{n+1} + R_n^\alpha[f], \quad (13)$$

где A_0 — постоянная, зависящая от выбранного сеточного шаблона, а функция $R_n^\alpha[f]$ является линейной функцией от f^0, \dots, f^n .

① Случай $\alpha \in (-1, 0)$, т.е. ${}_t_0\mathcal{D}_t^\alpha f = {}_t_0I_t^{-\alpha} f$.

- Простейшая квадратурная формула:

$$({}_t_0I_t^{-\alpha} f)(t_n) \approx (S_0^{-\alpha} f)(t_n) = \frac{(t_n - t_0)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f^0 + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{s=1}^n [(t_n - t_{s-1})^{-\alpha} - (t_n - t_s)^{-\alpha}] [f(t_s) - f^0].$$

- После применения полиномиальной интерполяции функции $f(t)$ между соседними временными шагами:

$$({}_t_0I_t^{-\alpha} f)(t_n) \approx (S_1^{-\alpha} f)(t_n) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left\{ (1-\alpha)(t_n - t_0)^{-\alpha} f^0 + (\Delta t_n)^{-\alpha} [f(t_n) - f^0] + \sum_{s=1}^{n-1} \left[\frac{(t_n - t_{s-1})^{1-\alpha}}{\Delta t_s} + \frac{(t_n - t_{s+1})^{1-\alpha}}{\Delta t_{s+1}} - \frac{\Delta t_s + \Delta t_{s+1}}{\Delta t_s \Delta t_{s+1}} (t_n - t_s)^{1-\alpha} \right] (f(t_s) - f^0) \right\}.$$

② Случай $\alpha \in (0, 1)$.

- Квадратурная формула Грюнвальда-Летникова:

$$({}_t_0D_t^\alpha f)(t_n) \approx \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{s=0}^n B_s^n f(t_n - s\Delta t), \quad B_s^n = (-1)^s \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(s+1)\Gamma(\alpha-s+1)}.$$

Рассматривается процесс двумерной однофазной фильтрации флюида с постоянными свойствами в гомогенной несжимаемой пористой среде.

Уравнение на давление:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \kappa_{\alpha} \Delta({}_0 D_t^{\alpha} p), \quad \alpha \in (-1, 1). \quad (14)$$

Частное аналитическое решение уравнения (14) в единичном квадрате с нулевыми граничными условиями:

$$p(t, x, y) = E_{1-\alpha, 1}(-t^{1-\alpha}) \sin \pi x \sin \pi y, \quad x, y \in [0, 1], \quad t \geq 0, \quad (15)$$

где $E_{\gamma, \delta}(z)$ — функция типа Миттаг–Леффлера:

$$E_{\gamma, \delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\gamma k + \delta)}.$$

Решение (15) соответствует значению $\kappa_{\alpha} = (2\pi^2)^{-1}$.

Пример 1. Однофазная фильтрация. Эволюция давления

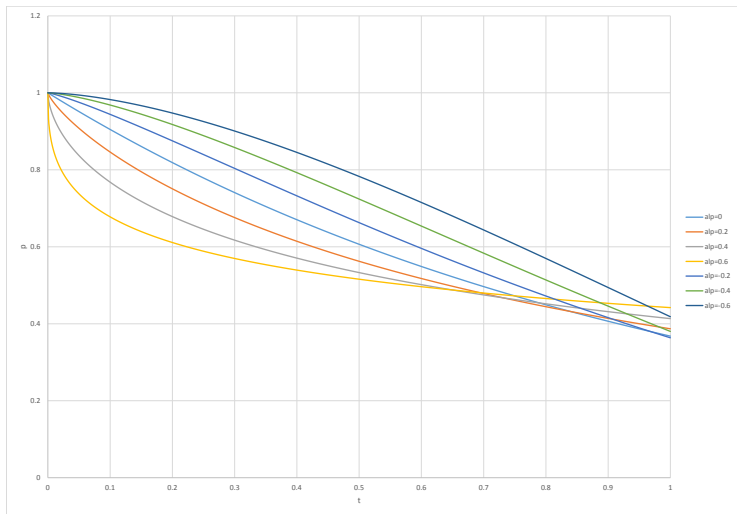


Рис. 1: Эволюция давления (15) в центральной точке расчетной области

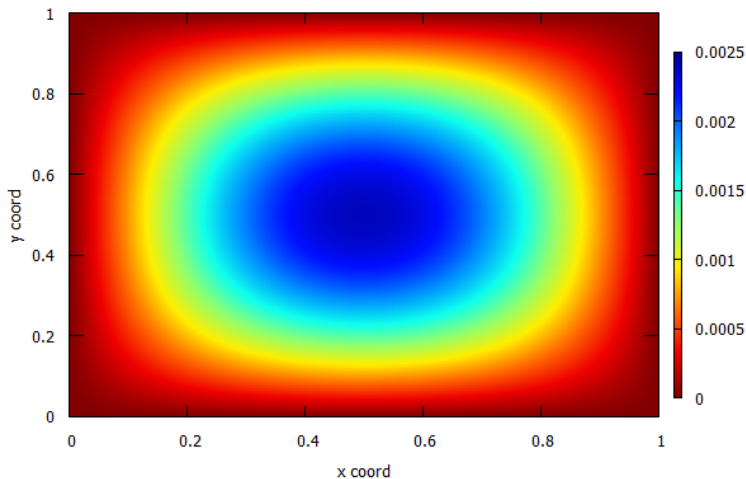


Рис. 2: Поле погрешности давления в момент времени $t=0.4$ при $\alpha=0.2$

Пример 1. Однофазная фильтрация. Оценка погрешности

Зависимость погрешности от размеров расчетной сетки:

Таблица 1: При $t=0.4$, $\alpha=0.2$

$\Delta_x \Delta_t$	0.050	0.010	0.005	0.001
0.1	0.0380334	0.0146407	0.00981928	0.00458264
0.05	0.0365080	0.0129791	0.00812879	0.00286082
0.03	0.0361752	0.0126166	0.00775998	0.00248517
0.02	0.0360805	0.0125134	0.00765506	0.00237830

Таблица 2: При $t=0.4$, $\alpha=0.6$

$\Delta_x \Delta_t$	0.050	0.010	0.005	0.001
0.1	0.172816	0.109420	0.0880658	0.0513834
0.05	0.171909	0.108467	0.0871041	0.0504184
0.03	0.171711	0.108259	0.0868968	0.0502144
0.02	0.171655	0.108200	0.0868379	0.0501569

Таблица 3: При $\alpha=0.6$ и переменном шаге по времени

t_0	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
$\Delta_x N_t$	107	154	201
0.1	0.0430772	0.035018	0.0318513
0.05	0.0416415	0.0335514	0.0303737
0.03	0.0413287	0.0332319	0.0300517
0.02	0.0412397	0.033141	0.0299601

Пример 2. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель плоского вытеснения. Параметры пласта и флюидов

Размер расчетной области: $400 \text{ м} \times 400 \text{ м}$;
Пористость среды: $\phi(p) = 0.2 \left[1 + c_f(p - 2 \cdot 10^7) \right]$, $c_f = 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$;
Проницаемость среды: $k = 400 \text{ мД}$;
Плотности фаз: $\rho_o^* = 800 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $\rho_w^* = 1000 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$;
Вязкости фаз: $\mu_o = 2.8 \text{ сП}$, $\mu_w = 0.41 \text{ сП}$;
Объемные коэффициенты фаз:

$$B_o = \frac{B_o^*}{1 + c_o(p_o - p_o^*)}, \quad B_w = \frac{B_w^*}{1 + c_w(p_w - p_w^*)},$$

где

$$B_w^* = 1.02, \quad c_o = 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}, \quad p_o^* = 2 \cdot 10^7 \text{ Па}, \\ B_o^* = 1.12, \quad c_w = 4.5 \cdot 10^{-10} \text{ Па}^{-1}, \quad p_w^* = 2 \cdot 10^7 \text{ Па};$$

Относительные фазовые проницаемости:

$$k_{ro} = \begin{cases} 1, & 0 \leq S_w < 0.2; \\ 1.67(0.8 - S_w), & 0.2 \leq S_w \leq 0.8; \\ 0, & 0.8 < S_w \leq 1; \end{cases} \quad k_{rw} = \begin{cases} 0, & 0 \leq S_w < 0.2; \\ 0.417(S_w - 0.2), & 0.2 \leq S_w \leq 0.8; \\ 0.25, & 0.8 < S_w \leq 1; \end{cases}$$

Дробные аналоги относительных фазовых проницаемостей k_{ri}^α :

$$k_{ri}^\alpha = k^\alpha(x, y, z) k_{ri}.$$

Равенство значений безразмерных аналогов коэффициента пьезопроводности во всех экспериментах:

$$\kappa^\alpha \equiv \frac{k k^\alpha T^{1-\alpha}}{L^2} = const, \quad (16)$$

где $L = 400 \text{ м}$ — характерный размер расчетной области, $T = 2 \cdot 10^6 \text{ с}$ — предельное время расчета. Для пласта с классическим законом Дарси было принято значение $k^1 = 1$. Тогда удельная дробная проницаемость коллектора

$$k^\alpha = T^{\alpha-1}.$$

Пример 2. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель плоского вытеснения. Начальные и граничные условия

Начальные условия:

$$p(x, y) = (500 - 0.625y) \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$S_w(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 400, \quad 0 \leq y \leq 100; \\ 0.2, & 0 \leq x \leq 400, \quad 100 < y \leq 400; \end{cases}$$

Граничные условия:

$$p(x, 0) = 500 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad p(x, 400) = 250 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

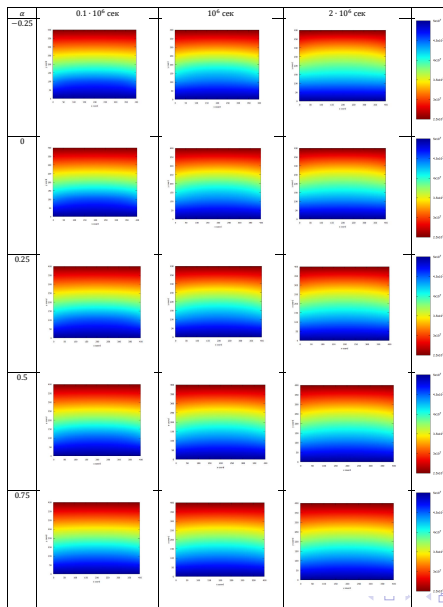
$$p(0, y) = p(400, y) = (500 - 0.625y) \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$\left. \frac{\partial S_w}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial S_w}{\partial x} \right|_{y=400} = 0, \quad \left. \frac{\partial S_w}{\partial y} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial S_w}{\partial y} \right|_{x=400} = 0;$$

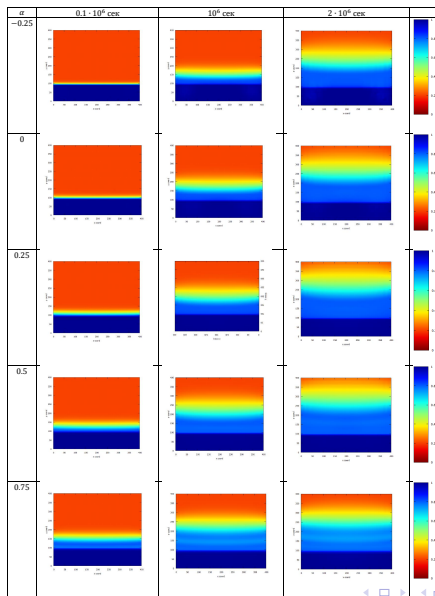
Расчеты проводились на равномерной сетке с параметрами

$$\Delta_x = \Delta_y = 10 \text{ м}, \quad \Delta_t = 1000 \text{ с}.$$

Пример 2. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель плоского вытеснения. Поле давления



Пример 2. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель плоского вытеснения. Поле водонасыщенности



Пример 3. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель с точечным источником. Начальные и граничные условия

Все параметры пласта и флюидов идентичны задаче плоского вытеснения.

Начальные условия:

$$p(x, y) = 250 \cdot 10^5 \text{ Па}, \quad S_w = 0.$$

Граничные условия:

$$p(x, 0) = p(x, 400) = p(0, y) = p(400, y) = 250 \cdot 10^5 \text{ Па},$$

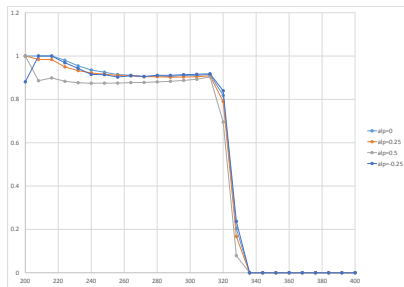
$$\left. \frac{\partial S_w}{\partial x} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial S_w}{\partial x} \right|_{y=400} = 0, \quad \left. \frac{\partial S_w}{\partial y} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial S_w}{\partial y} \right|_{x=400} = 0.$$

В начальный момент времени в центре расчетной области начинает действовать точечный источник с удельной мощностью

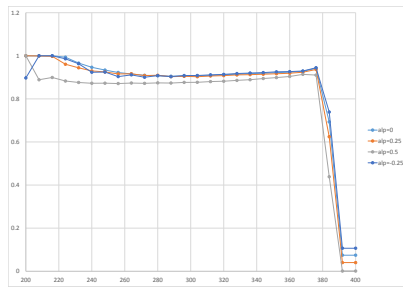
$$q_o = 0, \quad q_w = 7 \cdot 10^{-3} \frac{\text{м}^3}{\text{с}},$$

который работает в данном режиме до достижения в центральной ячейке значения водонасыщенности $S_w = 1$. После этого режим работы источника меняется таким образом, чтобы поддерживать неизменным это значение водонасыщенности.

Пример 3. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель с точечным источником. Распределение водонасыщенности



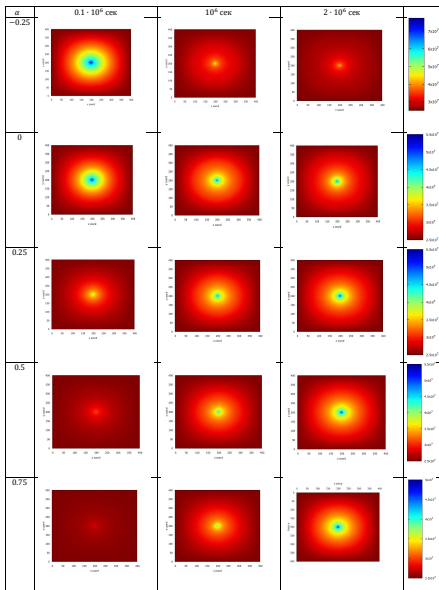
$t = 10^6 \text{ c}$



$t = 2 \cdot 10^6 \text{ c}$

Рис. 5: Распределение водонасыщенности по радиусу

Пример 3. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель с точечным источником. Поле давления



Пример 3. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель с точечным источником. Распределение давления

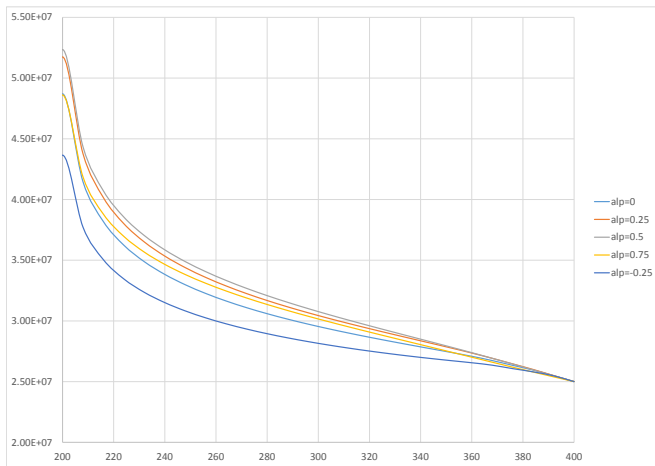


Рис. 7: Распределение давления по радиусу при $t=2 \cdot 10^6$ с

Пример 3. Нелинейная двухфазная фильтрация: модель с точечным источником. Зависимость мощности источника от времени

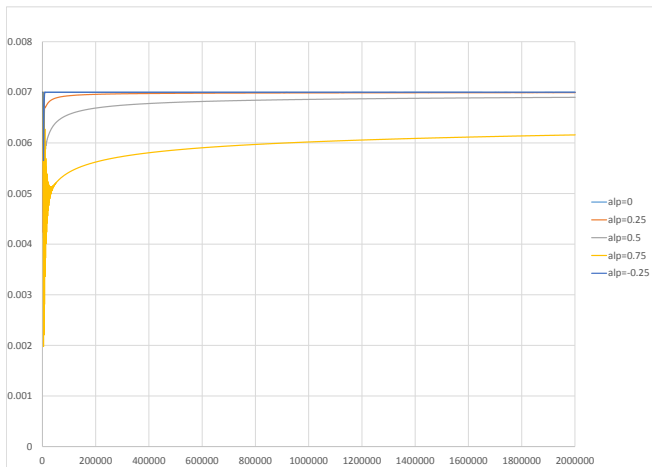


Рис. 8: Зависимость мощности источника от времени

- Создан прототип программного вычислительного комплекса гидродинамического моделирования фильтрационных течений в пластовых системах, обладающих свойством степенной памяти. Прототип основан на мелко-дифференциальном обобщении модели нелетучей нефти (black oil), полученной с использованием мелко-дифференциальной модификации закона Дарси.
- Данная модель позволяет описывать как замедленный (субдиффузионный), так и ускоренный (супердиффузионный) режимы фильтрации.
- Численная реализация модели выполнена на языке C++ по схеме IMPES.
- Для отладки прототипа программного комплекса использованы тестовые задачи с известным точным решением, его возможности продемонстрированы серией вычислительных экспериментов.
- Созданный прототип программного комплекса может быть использован для оценки влияния эффектов памяти на процессы многофазной фильтрации в неоднородных сложных коллекторах с простой геометрией, а также для отработки алгоритмических и программных решений, необходимых для создания полноценного мелко-дифференциального гидродинамического симулятора нефтегазовых месторождений.

Спасибо за внимание!